Mätfel och felberäkningar
– matematikens roll i fysikens undersökande arbetssätt

Workshop Gymnasiet

Lena Claesson, Elisabeth Nilsson & Lukasz Michalak
Nationellt resurscentrum för fysik (NRCF)
Lunds universitet

MATEMATIK
BIENNALEN
29–30 JAN 2026, GÖTEBORG

WS1

Skanna QR-koden intill eller gå till menti.com och skriv in koden **3796 2055**

Vad är mätfel?

- Onoggrannhet i det uppmätta resultatet
- Mätfel = mätosäkerhet = felmarginal
- Ett mätetal kan ses som att det avviker från det "sanna värdet" eller som ett talintervall som vi med noggranna mätningar försöker att minska ("zooma in på").

Mätfel i kurs- och ämnesplanerna

Gy11

"utvärdering av resultat och slutsatser genom analys av metodval, arbetsprocess och **felkällor**" (Fysik 1)

"utvärdering av resultat och slutsatser genom analys av metodval, arbetsprocess, **felkällor** och **mätosäkerhet**" (Fysik 1 och 2)

Gy25

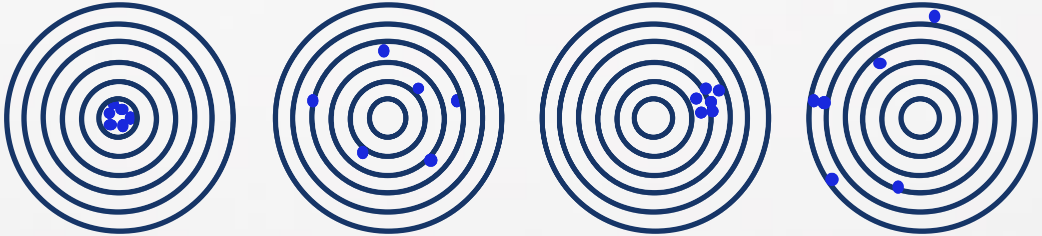
"värdering av metod och resultat" (Nivå 1 och 2)

"**mätnoggrannhet**" (Nivå 1)

"**mätnoggrannhet** och **felberäkningar**" (Nivå 2)

Precision – riktighet - noggrannhet

- **precision** (resultaten i mätserie stämmer inbördes)
- **riktighet** (resultaten i mätserie stämmer med det ”sanna” värdet)
- **noggrannhet** (ibland = riktighet; ofta inkluderas precision och riktighet i begreppet)



Hög riktighet Hög precision Hög noggrannhet	Hög riktighet Låg precision Låg noggrannhet	Låg riktighet Hög precision Låg noggrannhet	Låg riktighet Låg precision Låg noggrannhet

Vad kan man göra för att minimera mätfel?

x = 0,5 mm ± 0,5 mm

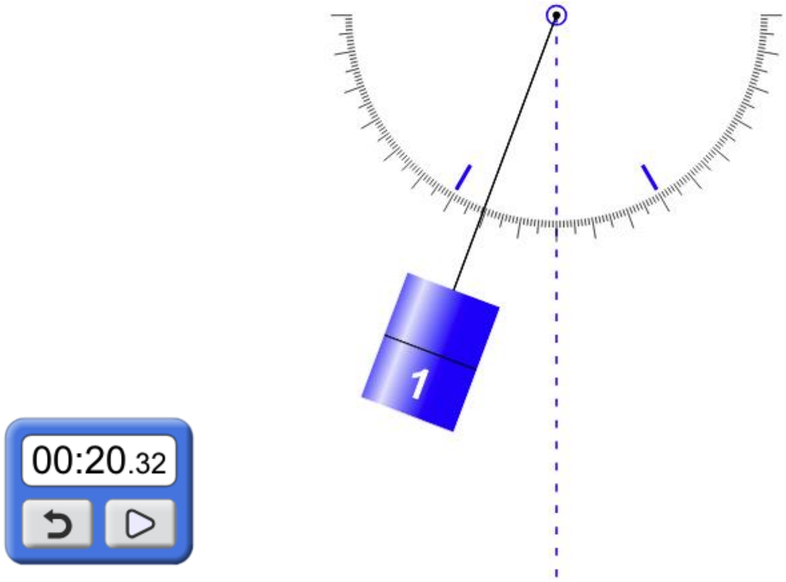
Mäta något större, längre ...

100 x = 7,8 mm ± 0,5 mm

x = (7,8 mm ± 0,5 mm)/100

x = 0,078 mm ± 0,005 mm

Vad kan man göra för att minimera mätfel?



$10T = 20{,}32\ \text{s} \pm 0{,}01\ \text{s}$

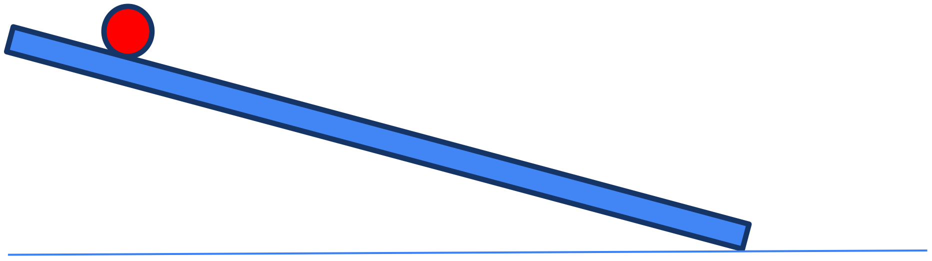
$T = (20{,}32\ \text{s} \pm 0{,}01\ \text{s})/10$

$T = 2{,}032\ \text{s} \pm 0{,}001\ \text{s}$

Reaktionstiden...?

Bild: https://phet.colorado.edu/

Att jämföra mätserier

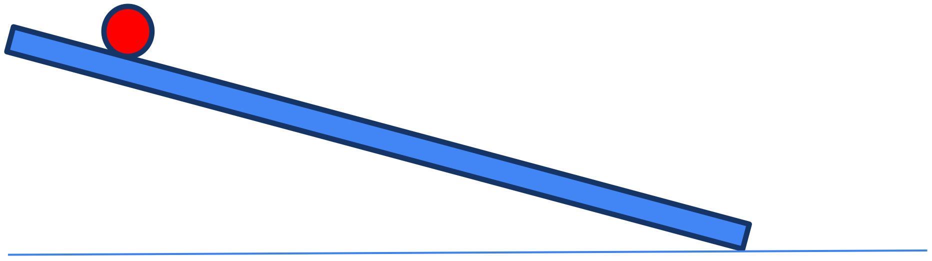


Tiden *t* för kulan att rulla nedför ett lutande plan?

Mätserie 1:	Mätserie 2:
1,13 s	1,04 s
0,93 s	0,96 s
1,09 s	1,09 s
0,95 s	1,19 s
1,06 s	0,99 s
1,04 s	1,09 s
1,08 s	0,80 s
1,13 s	1,13 s
Medelvärde:	Medelvärde:
1,05 s	1,02 s

Är dessa resultat lika eller olika?

Att jämföra mätserier



Vi är bara dåliga på att ta tid!

Skillnaden är ju så liten!

Man behöver bättre mätutrustning.

Mänsklig faktor!

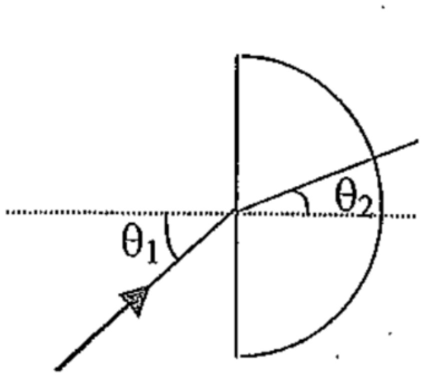
Mätserie 1:	Mätserie 2:
1,13 s	1,04 s
0,93 s	0,96 s
1,09 s	1,09 s
0,95 s	1,19 s
1,06 s	0,99 s
1,04 s	1,09 s
1,08 s	0,80 s
1,13 s	1,13 s
Medelvärde:	Medelvärde:
1,05 s	1,02 s

Att jämföra mätserier - inkludera mätfel

Intervallerna överlappar => Med hänsyn tagen till mätfel stämmer alltså resultaten med varandra (är lika).

	Tid (s) försök 1	Tid (s) försök 2
	1,13	1,04
	0,93	0,96
	1,09	1,09
	0,95	1,19
	1,06	0,99
	1,04	1,09
	1,08	0,8
	1,13	1,03
Medelvärde	1,05	1,02
Variationsbredd	0,20	0,39
Variationsbredd/2	0,10	0,195
Slutresultat	**1,1 ± 0,1**	**1,0 ± 0,2**
Standardavvikelse	0,0755	0,1146
	1,05 ± 0,08	1,02 ± 0,12

Vad kan man göra för att minimera mätfel?



Med vilken noggrannhet kan man mäta **vinklar**? (diskussion i smågrupper)

Hur påverkar fel i vinkelmätningar t.ex. en bestämning av brytningsindex?

Vad kan man göra för att minimera mätfel?

Vilken av mätningarna skulle du göra för att bestämma brytningsindex?

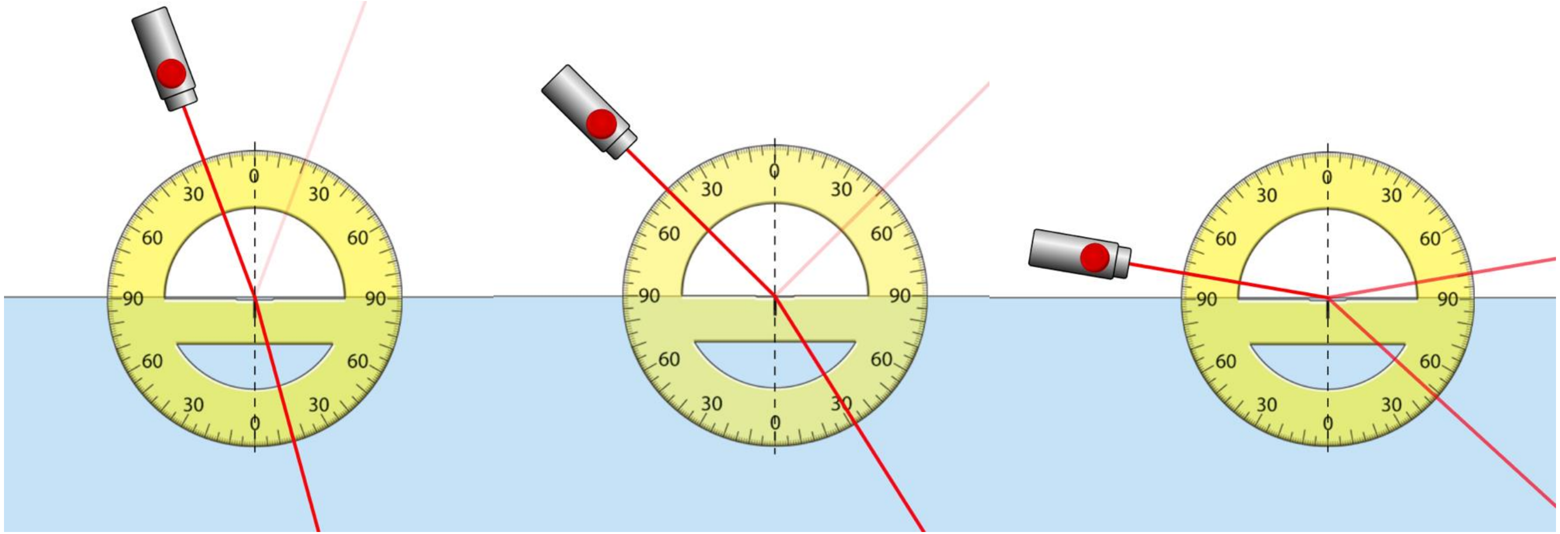


Bild: https://phet.colorado.edu/

Hur stora blir felen?

Om felet i vinkelavläsningen är ± 1 grad, kan felet i *n*, Δ*n*, t.ex. uppskattas genom beräkning av n_{max} och n_{min}

$\alpha_1/°$	$\alpha_2/°$	n	n_{max}	n_{min}	$\Delta n = (n_{\mathrm{max}} - n_{\mathrm{min}})/2$
20	15	1,321...	1,481...	1,181...	$\pm$0,15
45	32	1,334...	1,396...	1,275...	$\pm$0,06
80	48	1,325...	1,350	1,300...	$\pm$0,03

Mätfel vid indirekta mätningar: addition och subtraktion

Två motstånd kopplade i serie, den uppmätta spänningen över respektive motstånd är:

$U_1 = (5{,}0 \pm 0{,}2)$ V

$U_2 = (3{,}0 \pm 0{,}1)$ V

Total spänning över de två motstånden:

$U = U_1 + U_2$

Beräkna *U* och uppskatta dess mätfel.

Hur skulle man kunna göra?

Mätfel vid indirekta mätningar: addition och subtraktion

Metod 1: Min/max

$\Delta U = (U_{max} - U_{min})/2$

$U_{min} = (4{,}8 + 2{,}9)$ V = 7,7 V

$U_{max} = (5{,}2 + 3{,}1)$ V = 8,3 V

$U_{max} - U_{min} = 0{,}6$ V

$\Delta U = 0{,}3$ V

Metod 2: Addera mätfelen

$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = 0{,}3$ V

$U_1 = (5{,}0 \pm 0{,}2)$ V
$U_2 = (3{,}0 \pm 0{,}1)$ V

$U = U_1 + U_2 = 8{,}0$ V

Metod 3: Differentialer

$$\Delta U = \sqrt{(\Delta U_1)^2 + (\Delta U_2)^2} = 0{,}224\ \mathrm{V} \approx 0{,}23\ \mathrm{V} \approx 0{,}3\ \mathrm{V}$$

Svar: $U = (8{,}0 \pm 0{,}3)$ V

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \Delta x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \Delta y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \Delta z^2 + \cdots}$$

Mätfel vid indirekta mätningar: multiplikation och division

Ljudhastigheten v i luft bestäms genom att mäta frekvensen och våglängden av en stående ljudvåg i ett rör:

Frekvens $f = (440 \pm 2)$ Hz

Våglängd $\lambda = (0{,}78 \pm 0{,}01)$ m

Ljudhastigheten ges av:

$v = f\,\lambda$

Beräkna v och uppskatta mätfelet.

Hur skulle man kunna göra?

Mätfel vid indirekta mätningar: multiplikation och division

$$f = (440 \pm 2)\ \mathrm{Hz}$$
$$\lambda = (0{,}78 \pm 0{,}01)\ \mathrm{m}$$
$$v = f \cdot \lambda$$

Metod 1: Min/max:

$$\Delta v = (v_{\mathrm{max}} - v_{\mathrm{min}})/2$$
$$v_{\mathrm{max}} = (442 \cdot 0{,}79)\ \mathrm{m/s}$$
$$= 349{,}18\ \mathrm{m/s}$$
$$v_{\mathrm{min}} = (438 \cdot 0{,}77)\ \mathrm{m/s}$$
$$= 337{,}26\ \mathrm{m/s}$$
$$v_{\mathrm{max}} - v_{\mathrm{min}} = 11{,}92\ \mathrm{m/s}$$
$$\Delta v = 5{,}96\ \mathrm{m/s} \approx 6\ \mathrm{m/s}$$

Metod 2: Addera procentuella mätfel:

$$\Delta v/v = \Delta f/f + \Delta\lambda/\lambda =$$
$$= 0{,}455\% + 1{,}282\% = 1{,}737\%$$
$$\Delta v = 0{,}01737 \cdot v = 5{,}96\ \mathrm{m/s} \approx 6\ \mathrm{m/s}$$
$$v = (343 \pm 6)\ \mathrm{m/s}$$

Mätfel vid indirekta mätningar: multiplikation och division

$$f = (440 \pm 2)\ \mathrm{Hz}$$
$$\lambda = (0{,}78 \pm 0{,}01)\ \mathrm{m}$$
$$v = f \cdot \lambda$$

Metod 3: Differentialer:

$$\Delta v / v = \sqrt{(\Delta f / f)^2 + (\Delta\lambda/\lambda)^2}$$
$$= 0{,}0136 = 1{,}36\%$$
$$\Delta v = 0{,}0136 \cdot v = 4{,}67\ \mathrm{m/s}$$
$$\approx 5\ \mathrm{m/s}$$
$$v = (343 \pm 5)\ \mathrm{m/s}$$

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \Delta x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \Delta y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \Delta z^2 + \cdots}$$

Övning – Hur stora blir felen? 3 exempel att räkna på.

I ett försök beräknades en vinkel θ med hjälp av sambandet $\theta = \varphi_1 - 2\varphi_2$

där vinklarna φ_1 och φ_2 är mätta och onoggrannheterna uppskattade till:

$\varphi_1 = (60{,}15 \pm 0{,}25)$ grader

$\varphi_2 = (6{,}85 \pm 0{,}15)$ grader

Man vill bestämma en spaltvidd a genom att studera böjningsmönstret som bildas då spalten belyses med ljus från en HeNe–laser ($\lambda = (632{,}82 \pm 0{,}01)$ nm). En skärm placeras på avståndet L från spalten och man mäter upp sträckan x från centralmaximumet till en minimipunkt.

Följande samband gäller då $x << L$

$a = n \cdot \lambda \cdot \frac{L}{x}$ där $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Man mäter på det femte minimumet ($n = 5$) och får då

$L = (7{,}00 \pm 0{,}01)$ m

$x = (219 \pm 2)$ mm

Vi vill bestämma densiteten ρ hos ett plastmaterial.

Vi vet att $\rho = \frac{m}{V}$

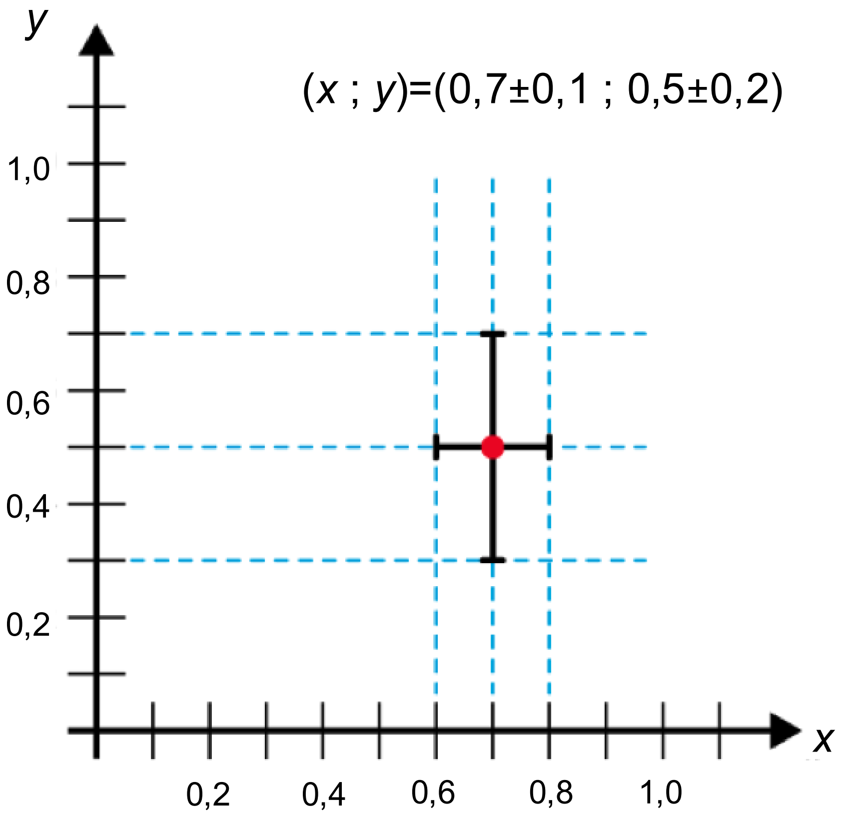
Vi mäter och uppskattar onoggrannheterna hos m och V

$m = (2{,}5 \pm 0{,}3)$ g

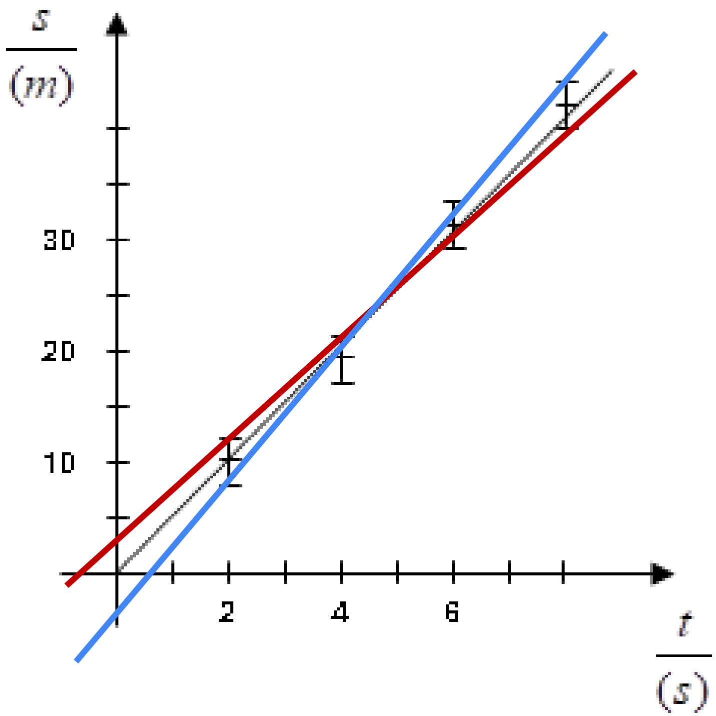
$V = (1{,}5 \pm 0{,}1)$ cm^3

Anpassning av rät linje till en graf

Hur undervisar ni om det?



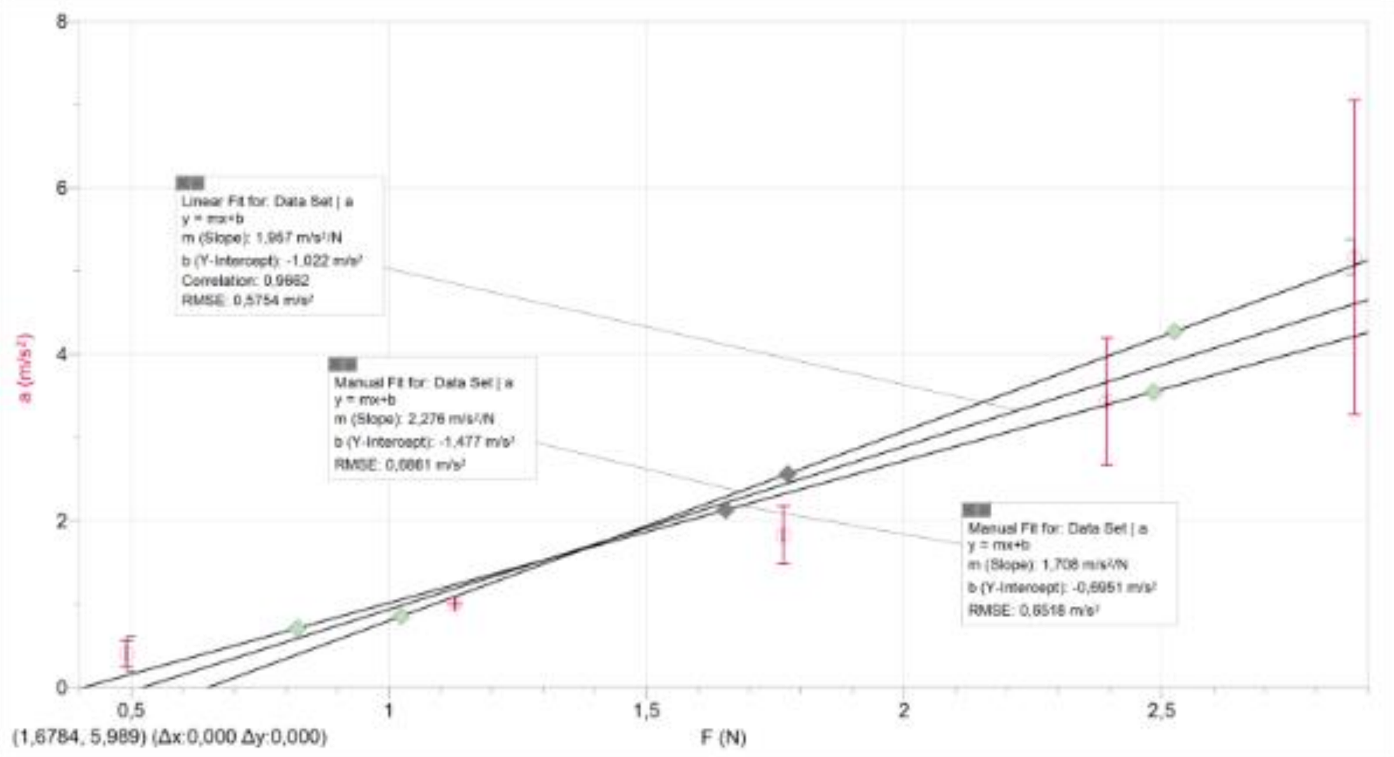
Mätfel för en rät linje



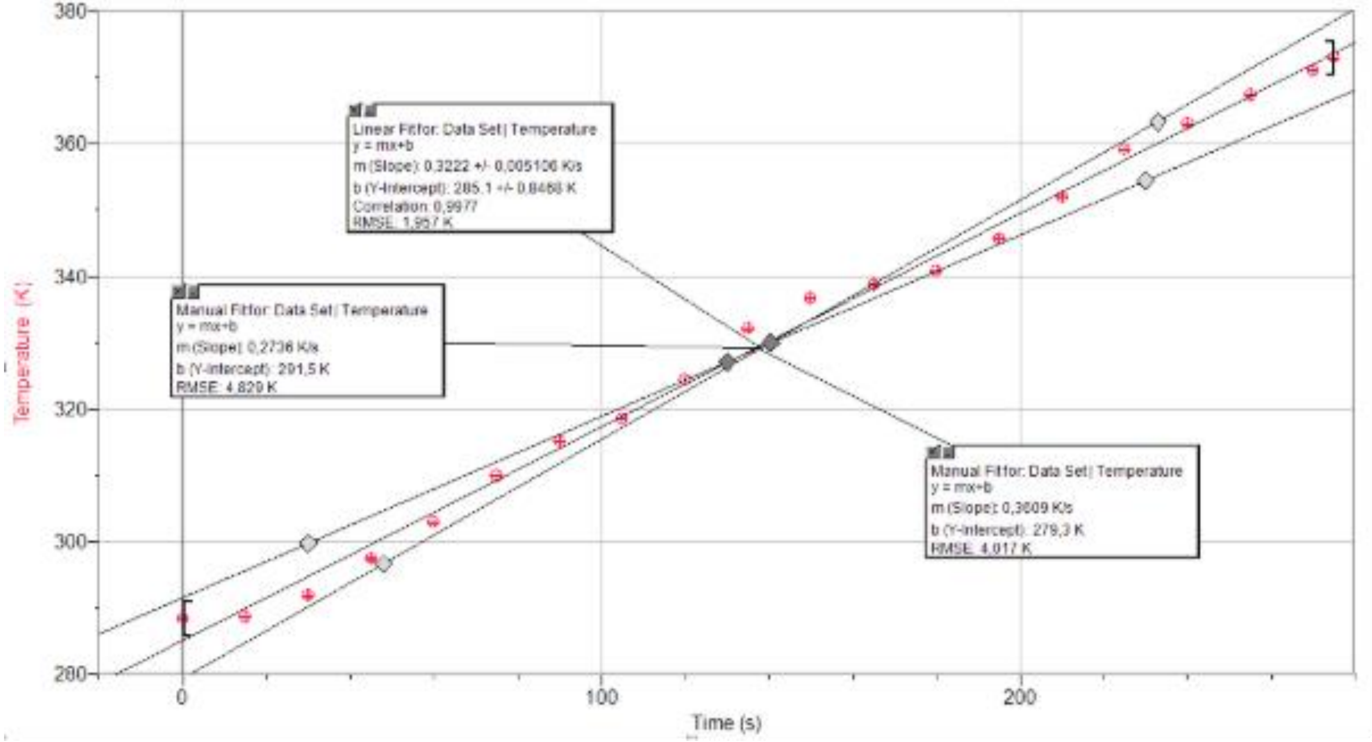
… < k < ….

… < m < …

Elevgrafer: IB – acceleration vs kraft (Newtons andra lag)



Elevgrafer: IB – temperatur vs tid (uppvärmning)



Mätfel i gymnasiefysiken

Workshop

Stort tack för ert engagemang!

LUNDS UNIVERSITET

Nationellt resurscentrum för fysik