Mätfel i gymnasiefysiken

Workshop – Fysikdagarna 2025

Elisabeth Nilsson, Lena Claesson &
Lukasz Michalak

Nationellt resurscentrum för fysik

LUNDS UNIVERSITET

Skanna QR-koden intill eller gå till menti.com och skriv in koden 8131 0312

Vad är mätfel?

- Onoggrannhet i det uppmätta resultatet
- Mätfel = mätosäkerhet = felmarginal
- Ett mätetal kan ses som att det avviker från det "sanna värdet" eller som ett talintervall som vi med noggranna mätningar försöker att minska ("zooma in på").

Mätfel i kurs- och ämnesplanerna

Gy11

"utvärdering av resultat och slutsatser genom analys av metodval, arbetsprocess och **felkällor**" (Fysik 1)

"utvärdering av resultat och slutsatser genom analys av metodval, arbetsprocess, **felkällor** och **mätosäkerhet**" (Fysik 1 och 2)

Gy25

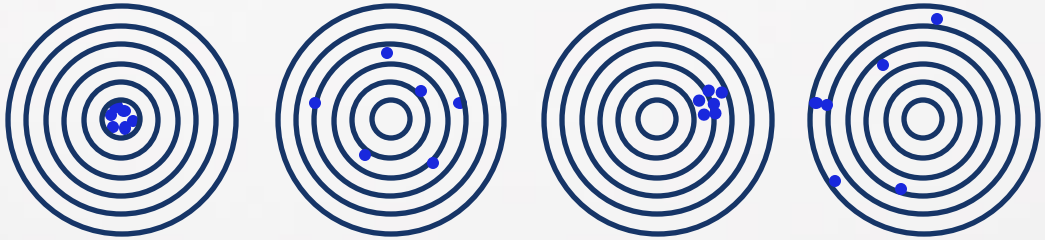
"värdering av metod och resultat" (Nivå 1 och 2)

"**mätnoggrannhet**" (Nivå 1)

"**mätnoggrannhet** och **felberäkningar**" (Nivå 2)

Precision – riktighet - noggrannhet

- **precision** (resultaten i mätserie stämmer inbördes)
- **riktighet** (resultaten i mätserie stämmer med det ”sanna” värdet)
- **noggrannhet** (ibland = riktighet; ofta inkluderas precision och riktighet i begreppet)



Hög riktighet	Hög riktighet	Låg riktighet	Låg riktighet
Hög precision	Låg precision	Hög precision	Låg precision
Hög noggrannhet	Låg noggrannhet	Låg noggrannhet	Låg noggrannhet

Vad kan man göra för att minimera mätfel?

x = 0,5 mm ± 0,5 mm

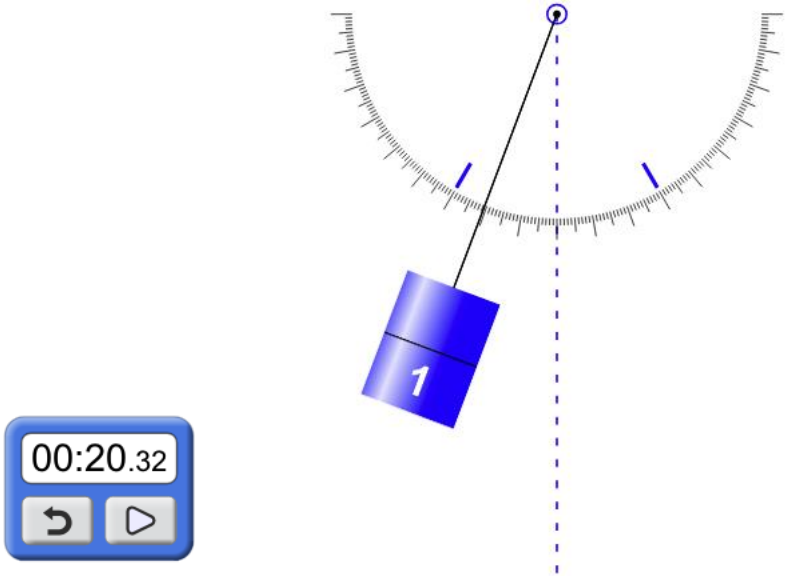
Mäta något större, längre ...

100 x = 7,8 mm ± 0,5 mm

x = (7,8 mm ± 0,5 mm)/100

x = 0,078 mm ± 0,005 mm

Vad kan man göra för att minimera mätfel?



$10T = 20{,}32\ \text{s} \pm 0{,}01\ \text{s}$

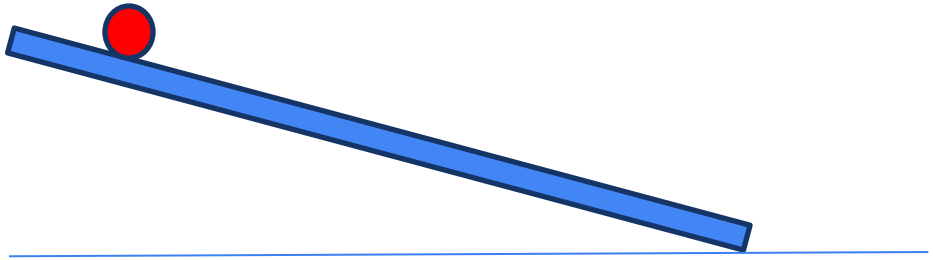
$T = (20{,}32\ \text{s} \pm 0{,}01\ \text{s})/10$

$T = 2{,}032\ \text{s} \pm 0{,}001\ \text{s}$

Reaktionstiden...?

Bild: https://phet.colorado.edu/

Att jämföra mätserier

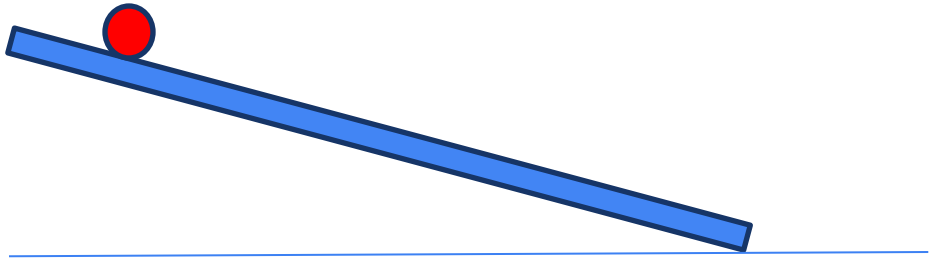


Tiden *t* för kulan att rulla nedför ett lutande plan?

Mätserie 1:	Mätserie 2:
1,13 s	1,04 s
0,93 s	0,96 s
1,09 s	1,09 s
0,95 s	1,19 s
1,06 s	0,99 s
1,04 s	1,09 s
1,08 s	0,80 s
1,13 s	1,13 s
Medelvärde:	Medelvärde:
1,05 s	1,02 s

Är dessa resultat lika eller olika?

Att jämföra mätserier



Mätserie 1:	Mätserie 2:
1,13 s	1,04 s
0,93 s	0,96 s
1,09 s	1,09 s
0,95 s	1,19 s
1,06 s	0,99 s
1,04 s	1,09 s
1,08 s	0,80 s
1,13 s	1,13 s
Medelvärde:	Medelvärde:
1,05 s	1,02 s

Vi är bara dåliga på att ta tid!

Skillnaden är ju så liten!

Man behöver bättre mätutrustning.

Mänsklig faktor!

Att jämföra mätserier - inkludera mätfel

Intervallen överlappar =>
Med hänsyn tagen till mätfel stämmer alltså resultaten med varandra (är lika).

	Tid (s) försök 1	Tid (s) försök 2
	1,13	1,04
	0,93	0,96
	1,09	1,09
	0,95	1,19
	1,06	0,99
	1,04	1,09
	1,08	0,8
	1,13	1,03
Medelvärde	1,05	1,02
Variationsbredd	0,20	0,39
Variationsbredd/2	0,10	0,195
Slutresultat	**1,1 ± 0,1**	**1,0 ± 0,2**
Standardavvikelse	0,0755	0,1146
	1,05 ± 0,08	1,02 ± 0,12

Att jämföra mätserier - bättre mätutrustning (photogates)

	Tid (s) försök 1	Tid (s) försök 2
	0,4284	0,4271
	0,4271	0,4259
	0,4288	0,4237
	0,4302	0,4236
	0,4272	0,425
	0,4282	0,4243
	0,4270	0,4235
	0,4265	0,4215
Medelvärde	0,4279	0,4243
Variationsbredd	0,0037	0,0056
Variationsbredd/2	0,0019	0,0028
Slutresultat	**0,428 ± 0,002**	**0,424 ± 0,003**
Standardavvikelse	0,0012	0,0017
	0,4279 ± 0,0012	0,4243 ± 0,0017

Att jämföra mätserier - bättre mätutrustning (photogates)

	Tid (s) försök 1	Tid (s) försök 2
	0,4284	0,4271
	0,4271	0,4259
	0,4288	0,4237
	0,4302	0,4236
Variationsbredd/2	0,0019	0,0028
Slutresultat	**0,428 ± 0,002**	**0,424 ± 0,003**
Standardavvikelse	0,0012	0,0017
	0,4279 ± 0,0012	0,4243 ± 0,0017

What is the timing precision of photogate measurements?

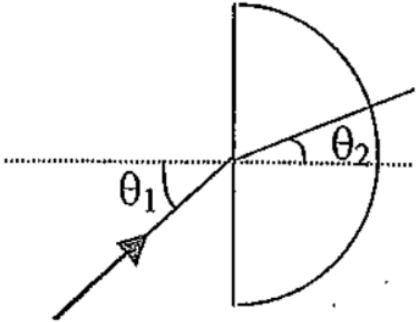
APRIL 6, 2020

0.025 s

For Blocked-to-Blocked and Unblocked-to-Unblocked transitions

Vernier photogates have an electronic timing resolution of 1 microsecond. You will, however, typically get measurements with as much as +/-25 millisecond variation. This is due to variations in optical-response tolerances of the photodiodes and the geometry of the object relative to the path it takes through the photogate.

Vad kan man göra för att minimera mätfel?



Med vilken noggrannhet kan man mäta **vinklar**? (diskussion i smågrupper)

Hur påverkar fel i vinkelmätningar t.ex. en bestämning av brytningsindex?

Vad kan man göra för att minimera mätfel?

Vilken av mätningarna skulle du göra för att bestämma brytningsindex?

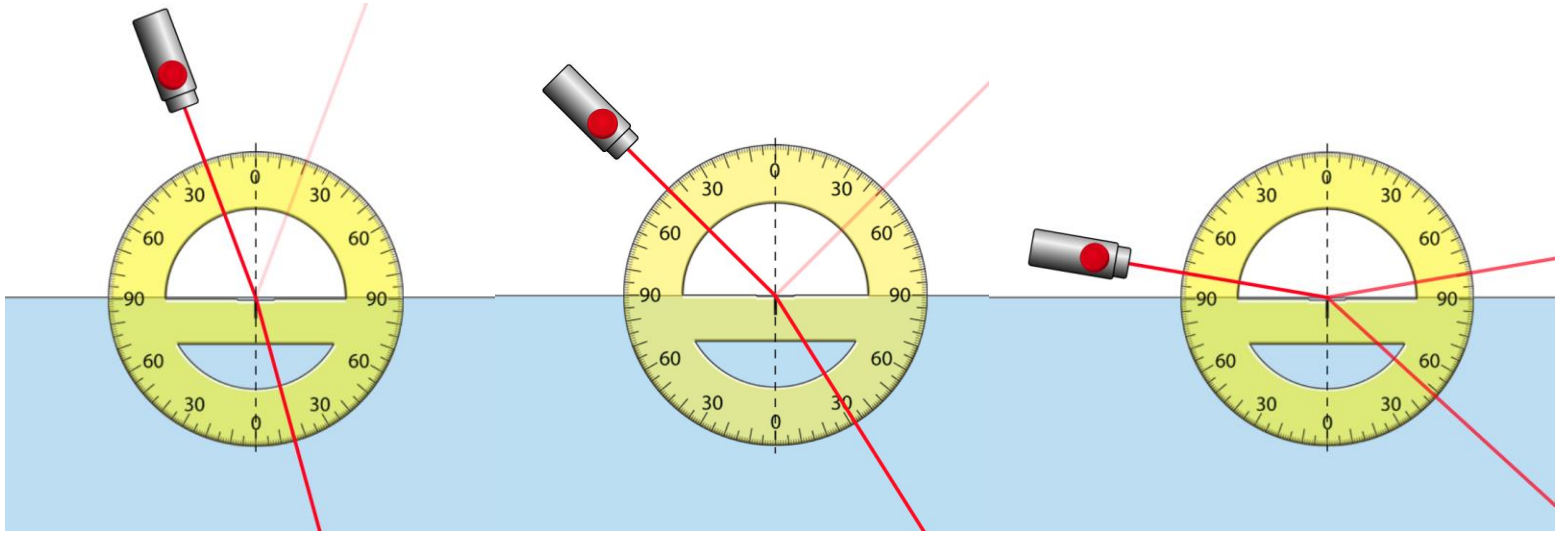


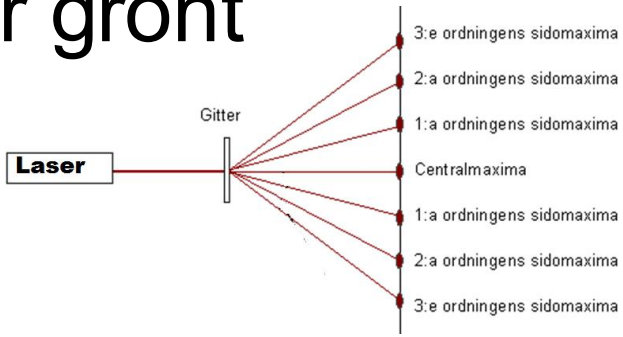
Bild: https://phet.colorado.edu/

Hur stora blir felen?

Om felet i vinkelavläsningen är ± 1 grad, kan felet i *n*, Δ*n*, t.ex. uppskattas genom beräkning av n_{max} och n_{min}

$\alpha_1/^\circ$	$\alpha_2/^\circ$	n	n_{max}	n_{min}	$\Delta n = (n_{\text{max}} - n_{\text{min}})/2$
20	15	1,321...	1,481...	1,181...	$\pm$0,15
45	32	1,334...	1,396...	1,275...	$\pm$0,06
80	48	1,325...	1,350	1,300...	$\pm$0,03

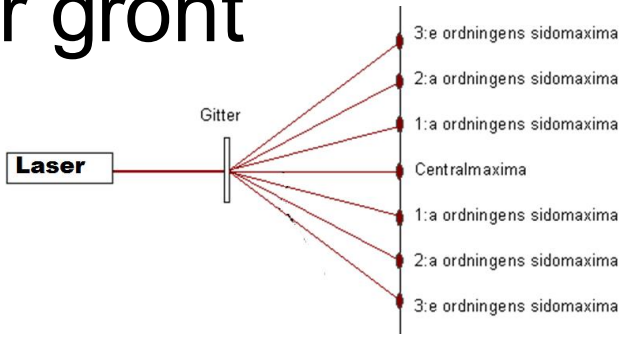
Elevexempel: Laboration med gitter
Uppgift: Bestäm våglängden för grönt och/eller rött laserljus



Metod:

- Rikta ljuset från lasern vinkelrät mot ett gitter med 100 linjer/mm. Fånga interferensmönstret på ett papper upptejpat på väggen.
- Mät de sträckor som behövs för att bestämma avlänkningsvinkeln, α, för olika ordningstal. Redovisa dina värden i en tabell.
- Rita $\sin\alpha$ som funktion av ordningstalet. Anpassa en rät linje till dina mätvärden.

Elevexempel: Laboration med gitter
Uppgift: Bestäm våglängden för grönt och/eller rött laserljus



Resultat och diskussion:

- Bestäm linjens riktningskoefficient k samt tolka och förklara betydelsen av riktningskoefficienten k.
- Bestäm laserpekarens våglängd med hjälp av riktningskoefficienten k.
- Diskutera felkällor och deras påverkan på resultatet.

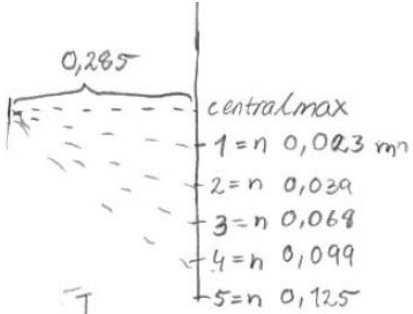
Frågor att diskutera

Utmaningar för läraren/eleven?

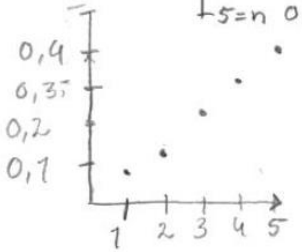
Hur har eleverna angripit uppgiften?

- Har de gjort lätt/svårt för sig?
- Vad har de gjort på ett bra sätt?
- Identifiera fel.
- Vinkelbestämningar?

Elevlösning 1



n	α	sin α
1	4,61°	0,08
2	7,79	0,135
3	13,47	0,232
4	19,15	0,328
5	23,68	0,4



$$k = \frac{\lambda}{d} = \frac{0,32}{4} \Rightarrow 0,08$$

$$d = \frac{10^{-3}}{100}\,m$$

$$\lambda = d \cdot k \Rightarrow \frac{10^{-3}}{100} \cdot 0,08$$

$$\lambda = 8 \cdot 10^{-6}\,m$$

$$\underline{\lambda = 8\,\mu m}$$

felkällor: ojämnt på vägegen, pappret vi mätte på kan ha hängt ojämnt => felvärdiga mätvärden.

Elevlösning 2

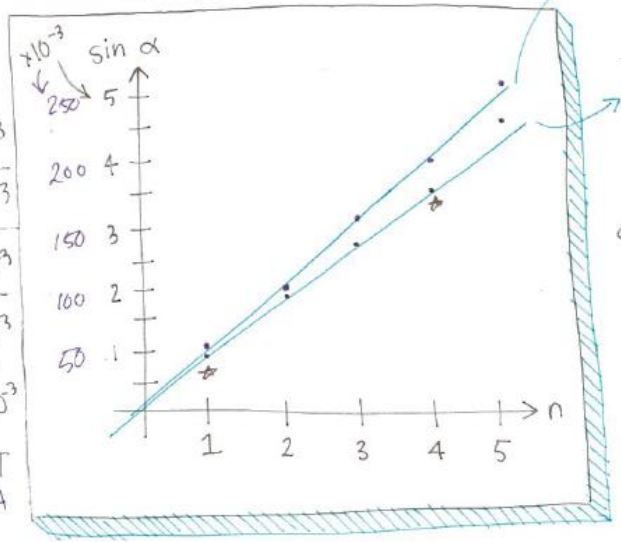
15.7 · 12.3 · 9.2 · 6.3 · 3.2 ·
5 4 3 2 1 max c

· $n \cdot \lambda = d \cdot \sin\alpha \longrightarrow \sin\alpha = \frac{n \times \lambda}{d}$ → K-värdet

· 57.9 cm
↳ 0.579 m till tavla från gitter/laser

· $d = 10^{-5}$

n	sin α	
1	0.96×10^{-3}	55×10^{-3}
2	1.9×10^{-3}	108×10^{-3}
3	2.77×10^{-3}	156×10^{-3}
4	3.6×10^{-3}	207×10^{-3}
5	4.7×10^{-3}	261×10^{-3}
	FEL	RÄTT LILA



$K = \frac{261\times10^{-3} - 55\times10^{-3}}{5-1} = 0.0515$

$K = \frac{\lambda}{d} \Rightarrow K \cdot d = 0.0515\times10^{-5} = 0.515\times10^{-6}$

515 nm

$K: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3.6\times10^{-3} - 0.96\times10^{-3}}{4-1}$

$= 0.00088 = 88\times10^{-5}$

$88\times10^{-5} = \frac{\lambda}{d}$

$\lambda = 88\times10^{-5} \times d = \text{-u-} \times 10^{-5}$

$\lambda = 88\times10^{-10}$

$\lambda \approx 9\times10^{-9} = 9\,nm$

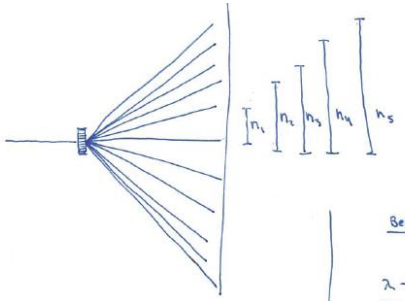
omöjligt

FEL

Felkällor:

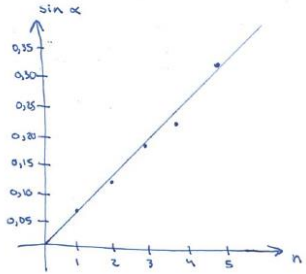
→ snett gitter (svårare att avläsa)
→ smutsigt glas → påverka hur laseru blir liksom/kan bli snett

Elevlösning 3



Resultat

n	sin α
1	0,068
2	0,133
3	0,196
4	0,228
5	0,325



Beräkningar

$$\lambda \cdot n = d \cdot \sin\alpha$$

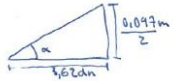
$$\lambda = \frac{d \cdot \sin\alpha}{n}$$

n = 1 :

$$\alpha = \arctan\frac{0{,}049/2}{0{,}362}$$

$$\sin\alpha = \sin\left(\arctan\frac{0{,}049/2}{0{,}362}\right)$$

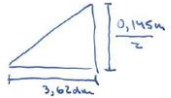
n = 2 :



$$\alpha = \arctan\frac{\left(\frac{0{,}097}{2}\right)}{0{,}362}$$

$$\sin\alpha = \sin\left(\arctan\frac{\frac{0{,}097}{2}}{0{,}362}\right)$$

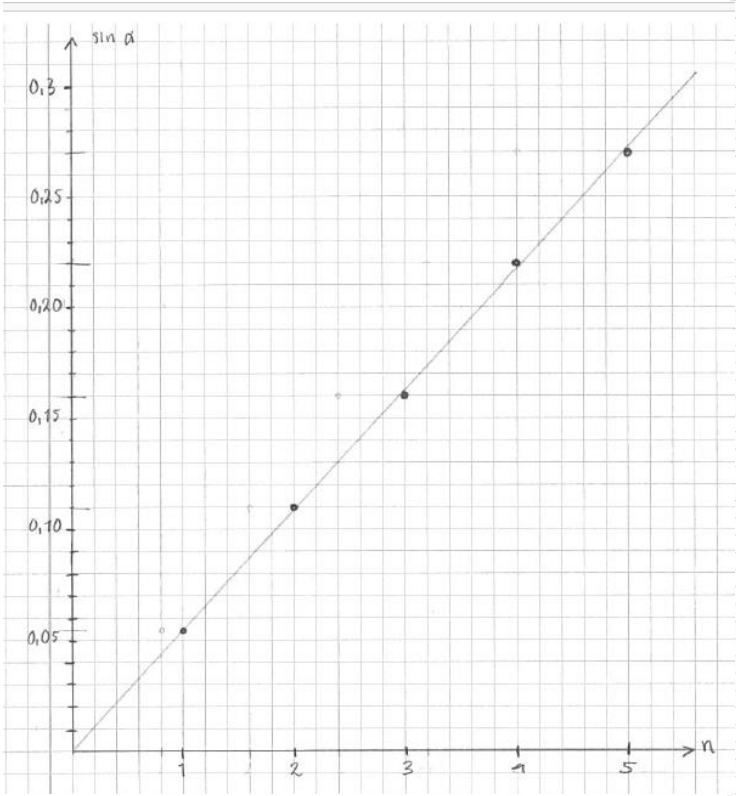
n = 3 :

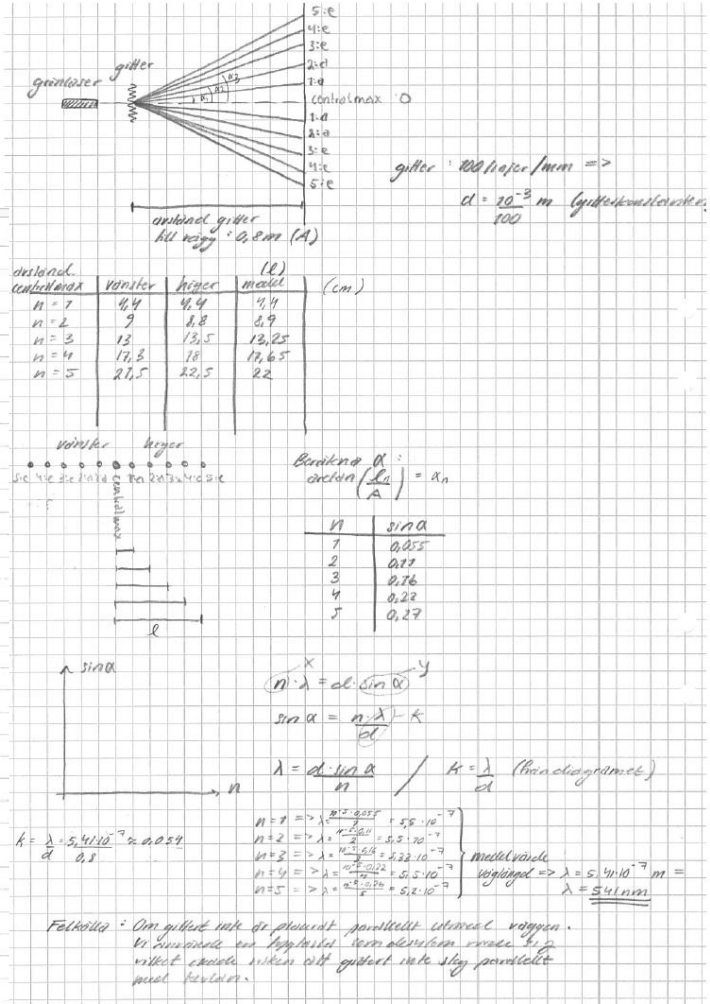


$$\alpha = \arctan\frac{\frac{0{,}145}{2}}{0{,}362}$$

$$\sin\alpha = \sin\left(\arctan\frac{\frac{0{,}145}{2}}{0{,}362}\right)$$

Elevlösning 4

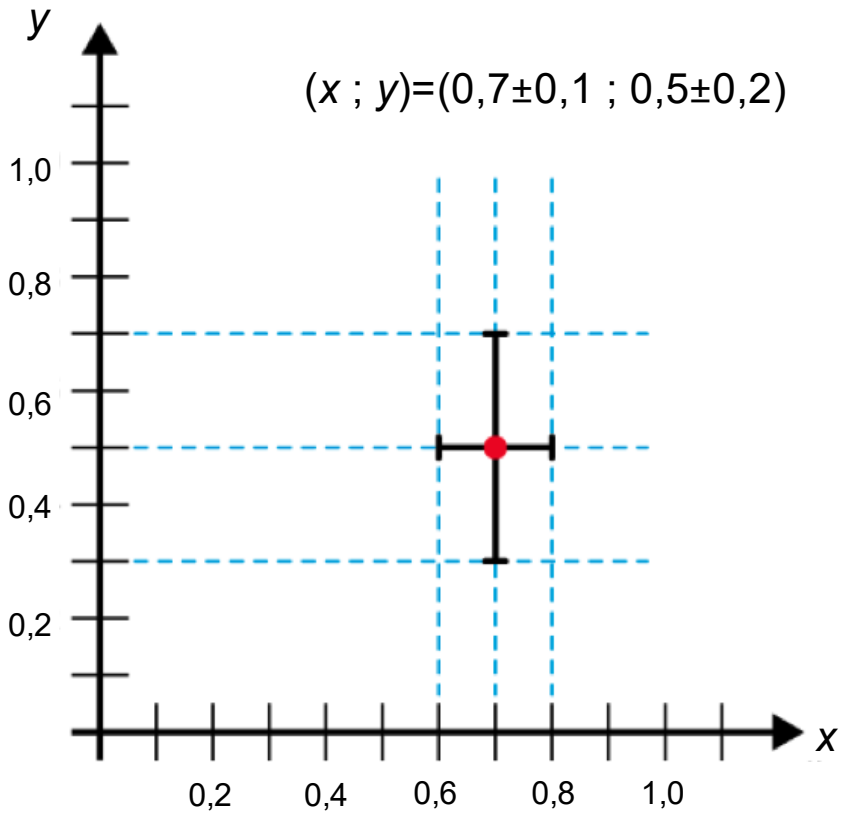




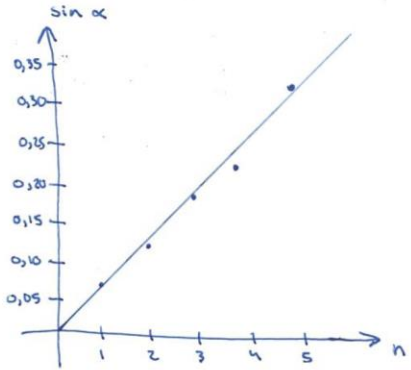
Anpassning av rät linje till en graf

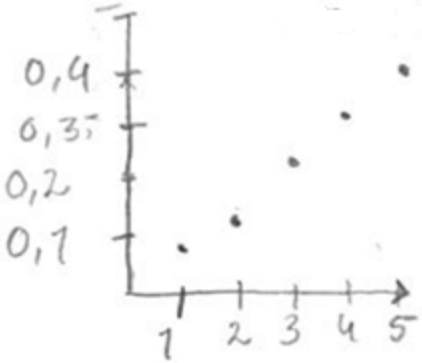
Hur undervisar ni om det?

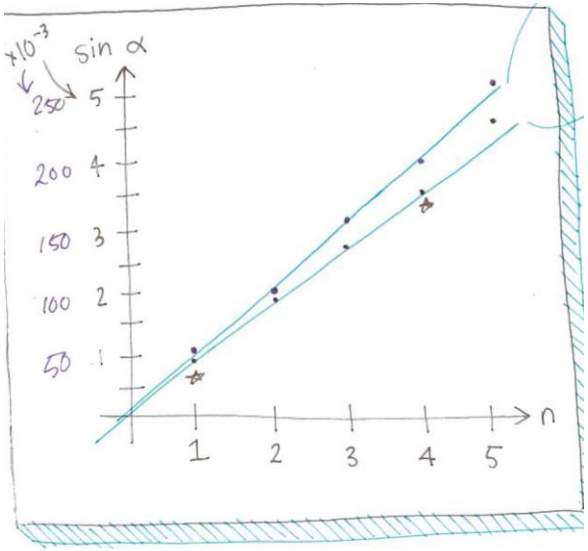
Hur hanterar eleverna graferna i gitteruppgiften?

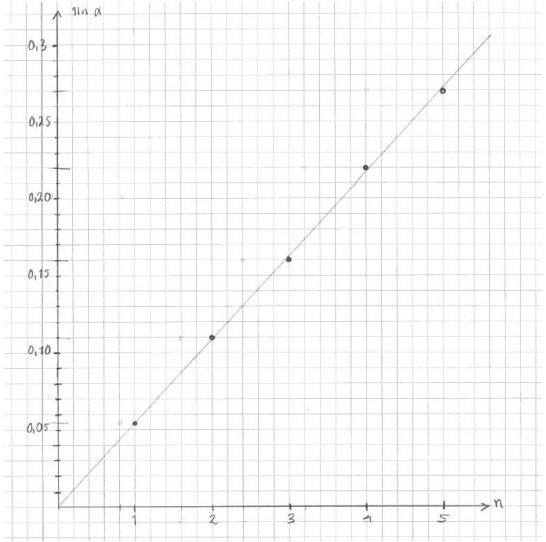


Elevgrafer

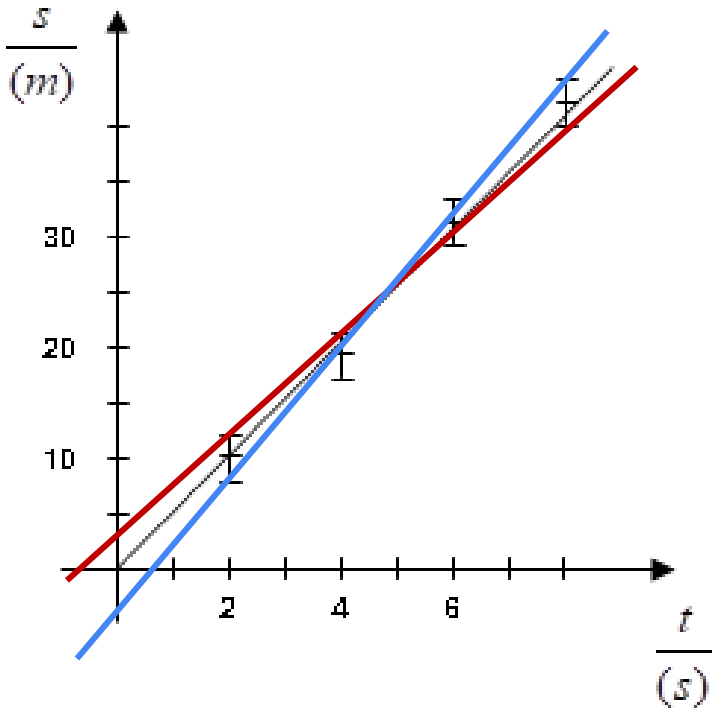

sin α
0,35
0,30
0,25
0,20
0,15
0,10
0,05
1
2
3
4
5
n


0,4
0,35
0,2
0,1
1
2
3
4
5


x10^-3
sin α
250
200
150
100
50
5
4
3
2
1
1
2
3
4
5
n


sin α
0,30
0,25
0,20
0,15
0,10
0,05
1
2
3
4
5
n

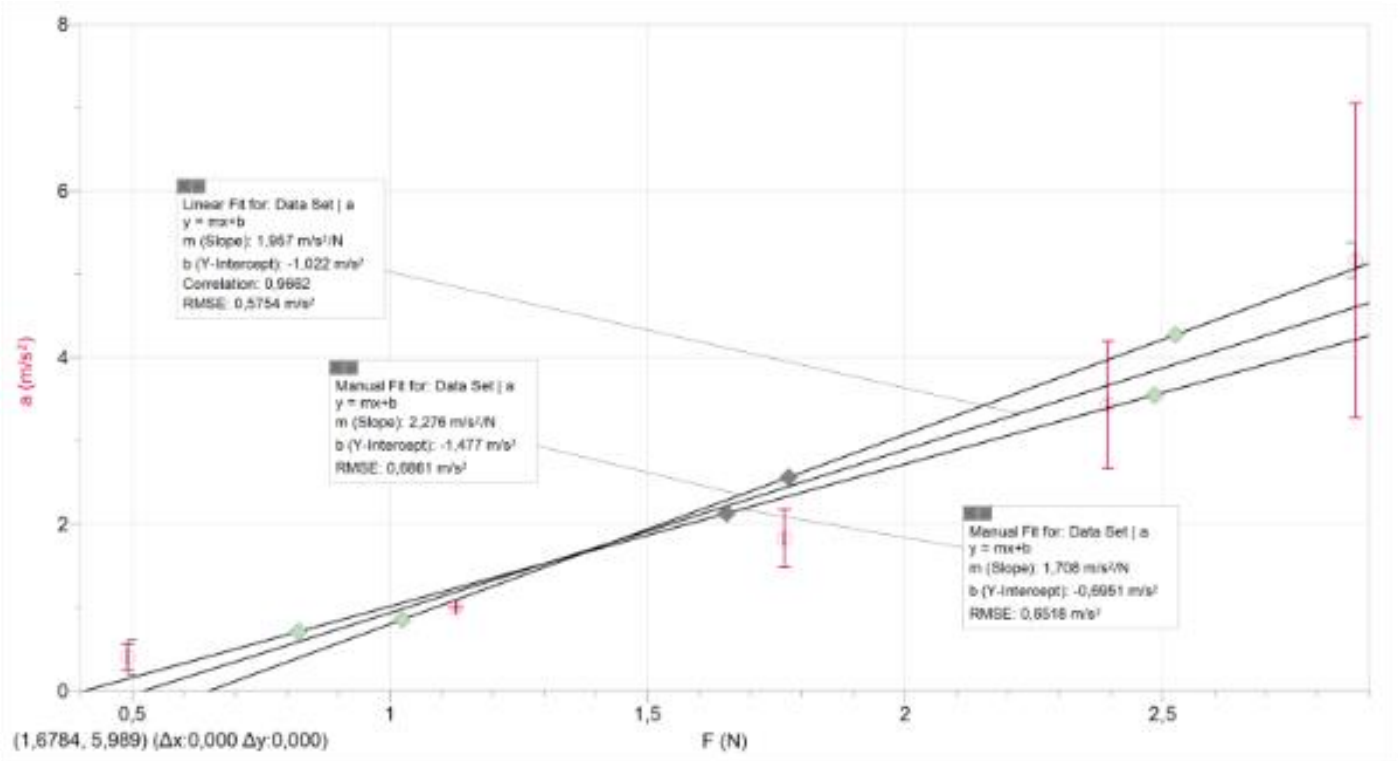
Mätfel för en rät linje



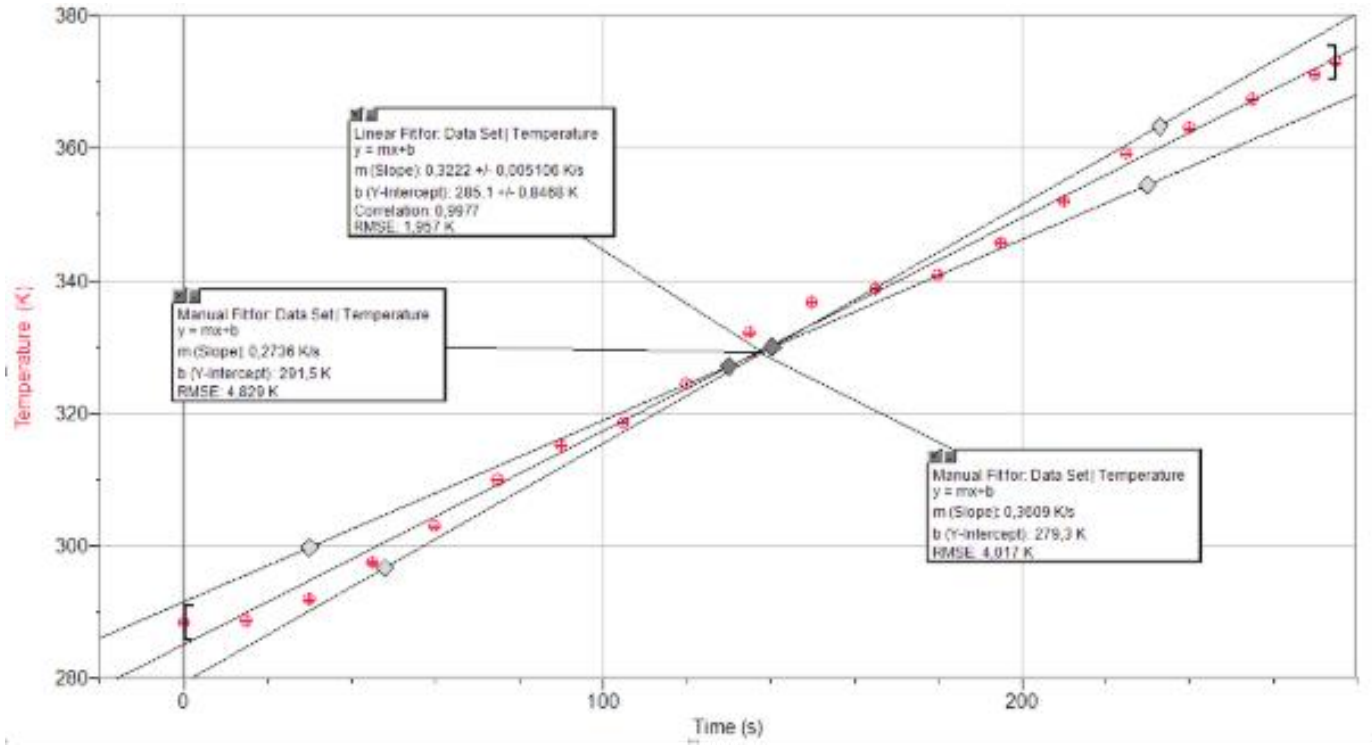
… < k < ….

… < m < …

Elevgrafer: IB 1 – acceleration vs kraft (vagnen)



Elevgrafer: IB 2 – temperatur vs tid (uppvärmning)



Mätfel vid indirekta mätningar: addition och subtraktion

Två motstånd kopplade i serie, den uppmätta spänningen över respektive motstånd är:

$U_1 = (5{,}0 \pm 0{,}2)$ V

$U_2 = (3{,}0 \pm 0{,}1)$ V

Total spänning över de två motstånden:

$U = U_1 + U_2$

Beräkna U och uppskatta dess mätfel.

Hur skulle man kunna göra?

Mätfel vid indirekta mätningar: addition och subtraktion

Metod 1: Min/max

$\Delta U = (U_{max} - U_{min})/2$

$U_{min} = (4{,}8 + 2{,}9)\ \text{V} = 7{,}7\ \text{V}$

$U_{max} = (5{,}2 + 3{,}1)\ \text{V} = 8{,}3\ \text{V}$

$U_{max} - U_{min} = 0{,}6\ \text{V}$

$\Delta U = 0{,}3\ \text{V}$

Metod 2: Addera mätfelen

$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = 0{,}3\ \text{V}$

$U_1 = (5{,}0 \pm 0{,}2)\ \text{V}$
$U_2 = (3{,}0 \pm 0{,}1)\ \text{V}$

$U = U_1 + U_2 = 8{,}0\ \text{V}$

Metod 3: Differentialer

$\Delta U = \sqrt{(\Delta U_1)^2 + (\Delta U_2)^2} = 0{,}224\ \text{V} \approx 0{,}23\ \text{V} \approx 0{,}3\ \text{V}$

Svar: $U = (8{,}0 \pm 0{,}3)\ \text{V}$

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \Delta x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \Delta y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \Delta z^2 + \cdots}$$

Mätfel vid indirekta mätningar: multiplikation och division

Ljudhastigheten v i luft bestäms genom att mäta frekvensen och våglängden av en stående ljudvåg i ett rör:

Frekvens $f = (440 \pm 2)$ Hz

Våglängd $\lambda = (0{,}78 \pm 0{,}01)$ m

Ljudhastigheten ges av:

$v = f\,\lambda$

Beräkna v och uppskatta mätfelet.

Hur skulle man kunna göra?

Mätfel vid indirekta mätningar: multiplikation och division

$$f = (440 \pm 2)\ \mathrm{Hz}$$
$$\lambda = (0{,}78 \pm 0{,}01)\ \mathrm{m}$$
$$v = f \cdot \lambda$$

Metod 1: Min/max:

$$\Delta v = (v_{\max} - v_{\min})/2$$
$$v_{\max} = (442 \cdot 0{,}79)\ \mathrm{m/s}$$
$$= 349{,}18\ \mathrm{m/s}$$
$$v_{\min} = (438 \cdot 0{,}77)\ \mathrm{m/s}$$
$$= 337{,}26\ \mathrm{m/s}$$
$$v_{\max} - v_{\min} = 11{,}92\ \mathrm{m/s}$$
$$\Delta v = 5{,}96\ \mathrm{m/s} \approx 6\ \mathrm{m/s}$$

Metod 2: Addera procentuella mätfel:

$$\Delta v/v = \Delta f/f + \Delta\lambda/\lambda =$$
$$= 0{,}455\% + 1{,}282\% = 1{,}737\%$$
$$\Delta v = 0{,}01737 \cdot v = 5{,}96\ \mathrm{m/s} \approx 6\ \mathrm{m/s}$$
$$v = (343 \pm 6)\ \mathrm{m/s}$$

Mätfel vid indirekta mätningar: multiplikation och division

$$f = (440 \pm 2)\ \mathrm{Hz}$$
$$\lambda = (0{,}78 \pm 0{,}01)\ \mathrm{m}$$
$$v = f \cdot \lambda$$

Metod 3: Differentialer:

$$\Delta v/v = \sqrt{(\Delta f/f)^2 + (\Delta\lambda/\lambda)^2}$$
$$= 0{,}0136 = 1{,}36\%$$
$$\Delta v = 0{,}0136 \cdot v = 4{,}67\ \mathrm{m/s}$$
$$\approx 5\ \mathrm{m/s}$$
$$v = (343 \pm 5)\ \mathrm{m/s}$$

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \Delta x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \Delta y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \Delta z^2 + \cdots}$$

NIST:s värden på fundamentala konstanter, maj 2024

CODATA RECOMMENDED VALUES OF THE FUNDAMENTAL PHYSICAL CONSTANTS: 2022

NIST SP 961 (May 2024)

An extensive list of constants is available on the NIST Physics Laboratory Web site physics.nist.gov/constants. For numerical values a number in parentheses, if present, is the one-standard-deviation uncertainty in the last two digits. For units with square brackets the full descriptions of $[\mathrm{m}]^{-1}$ and $[\mathrm{m}]$ are cycles per meter and meter per cycle, respectively. For the first radiation constant the full description of $[\mathrm{m}]^2$ is m^{-2} (m/cycle)^4.

Quantity	Symbol	Numerical value	Unit
speed of light in vacuum	c	299 792 458 (exact)	$\mathrm{m\ s^{-1}}$
Newtonian constant of gravitation	G	$6.674\,30(15) \times 10^{-11}$	$\mathrm{m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}}$
Planck constant	h	$6.626\,070\,15 \times 10^{-34}$ (exact)	$\mathrm{J\ Hz^{-1}}$
in eV s		$4.135\,667\,696\ldots \times 10^{-15}$	$\mathrm{eV\ Hz^{-1}}$
	$\hbar$	$1.054\,571\,817\ldots \times 10^{-34}$	J s
in eV s		$6.582\,119\,569\ldots \times 10^{-16}$	eV s
elementary charge	e	$1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$ (exact)	C
vacuum magnetic permeability $4\pi\alpha\hbar/e^2c$	μ_0	$1.256\,637\,061\,27(20) \times 10^{-6}$	$\mathrm{N\ A^{-2}}$
$\mu_0/(4\pi \times 10^{-7})$		0.999 999 999 87(16)	$\mathrm{N\ A^{-2}}$
vacuum electric permittivity $1/\mu_0c^2$	ϵ_0	$8.854\,187\,8188(14) \times 10^{-12}$	$\mathrm{F\ m^{-1}}$
Josephson constant $2e/h$	K_J	$483\,597.848\,4\ldots \times 10^9$	$\mathrm{Hz\ V^{-1}}$
von Klitzing constant $\mu_0c/2\alpha = 2\pi\hbar/e^2$	R_K	$25\,812.807\,45\ldots$	Ω
magnetic flux quantum $2\pi\hbar/(2e)$	Φ_0	$2.067\,833\,848\ldots \times 10^{-15}$	Wb
Bohr magneton $e\hbar/2m_e$	μ_B	$9.274\,010\,0657(29) \times 10^{-24}$	$\mathrm{J\ T^{-1}}$
in eV $\mathrm{T^{-1}}$		$5.788\,381\,7982(18) \times 10^{-5}$	$\mathrm{eV\ T^{-1}}$
nuclear magneton $e\hbar/2m_p$	μ_N	$5.050\,783\,7393(16) \times 10^{-27}$	$\mathrm{J\ T^{-1}}$
in eV $\mathrm{T^{-1}}$		$3.152\,451\,254\,17(98) \times 10^{-8}$	$\mathrm{eV\ T^{-1}}$
fine-structure constant $e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$	α	$7.297\,352\,5643(11) \times 10^{-3}$	
inverse fine-structure constant	α^{-1}	137.035 999 177(21)	
Rydberg frequency $\alpha^2m_ec^2/2h = E_h/2h$	cR_∞	$3.289\,841\,960\,2500(36) \times 10^{15}$	Hz
energy equivalent in eV		13.605 693 122 990(15)	eV
Rydberg constant	R_∞	10 973 731.568 157(12)	$[\mathrm{m^{-1}}]$
Bohr radius $\hbar/\alpha m_ec = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/m_ee^2$	a_0	$5.291\,772\,105\,44(82) \times 10^{-11}$	m
Hartree energy $\alpha^2m_ec^2 = e^2/4\pi\epsilon_0a_0 = 2(cR_\infty)h$	E_h	$4.359\,744\,722\,2060(48) \times 10^{-18}$	J

Quantity	Symbol	Numerical value	Unit
muon g-factor $-2(1 + a_\mu)$	g_μ	$-2.002\,331\,841\,23(82)$	
muon-proton magnetic moment ratio	μ_μ/μ_p	$-3.183\,345\,146(71)$	
proton mass	m_p	$1.672\,621\,925\,95(52) \times 10^{-27}$	kg
in u		1.007 276 466 5789(83)	u
energy equivalent in MeV	m_pc^2	938.272 089 43(29)	MeV
proton-electron mass ratio	m_p/m_e	1836.152 673 426(32)	
proton magnetic moment	μ_p	$1.410\,606\,795\,45(60) \times 10^{-26}$	$\mathrm{J\ T^{-1}}$
to nuclear magneton ratio	μ_p/μ_N	2.792 847 344 63(82)	
proton magnetic shielding correction $1-\mu'_p/\mu_p$ (H_2O, sphere, 25 °C)	σ'_p	$2.567\,15(41) \times 10^{-5}$	
proton gyromagnetic ratio $2\mu_p/\hbar$	γ_p	$2.675\,221\,8708(11) \times 10^8$	$\mathrm{s^{-1}\ T^{-1}}$
		42.577 478 461(18)	$\mathrm{MHz\ T^{-1}}$
shielded proton gyromagnetic ratio $2\mu'_p/\hbar$ (H_2O, sphere, 25 °C)	γ'_p	$2.675\,153\,194(11) \times 10^8$	$\mathrm{s^{-1}\ T^{-1}}$
		42.576 385 43(17)	$\mathrm{MHz\ T^{-1}}$
neutron mass in u	m_n	1.008 664 916 06(40)	u
energy equivalent in MeV	m_nc^2	939.565 421 94(48)	MeV
neutron-proton mass ratio	m_n/m_p	1.001 378 419 46(40)	
neutron magnetic moment	μ_n	$-9.662\,3653(23) \times 10^{-27}$	$\mathrm{J\ T^{-1}}$
to nuclear magneton ratio	μ_n/μ_N	$-1.913\,042\,76(45)$	
deuteron mass in u	m_d	2.013 553 212 544(15)	u
energy equivalent in MeV	m_dc^2	1875.612 945 00(58)	MeV
deuteron-proton mass ratio	m_d/m_p	1.999 007 501 2699(84)	
deuteron magnetic moment	μ_d	$4.330\,735\,087(11) \times 10^{-27}$	$\mathrm{J\ T^{-1}}$

From: https://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html

Even experts make mistakes

Table 1. Examples of Inappropriate and Appropriate Rounding

Published Value	Ref	Appropriate Rounding	Uncer-tainty[a]
771 ± 135	3	$(7.7 \pm 1.4) \times 10^{2}$	14
65.9 ± 10.1	3	$(6.6 \pm 1.0) \times 10^{1}$	10
$e^{-(646 \pm 69)/T}$	4	$e^{-(650 \pm 70)/T}$	7
1.79 ± 0.78	5	1.8 ± 0.8	8
$e^{(8450 \pm 850)/T}$	6	$e^{(8400 \pm 800)/T}$ [b]	8
$(1.4488 \pm 0.0290) \times 10^{-46}$	7	$(1.449 \pm 0.029) \times 10^{-46}$	29
-19.9998 SE 0.100842	8	-20.00 SE 0.10	10

[a]This column shows that each uncertainty has a value between 3 and 30, whatever the place value.

[b]This example illustrates laboratory rounding. When rounding involves 5 exactly, round to the even number.

Caballero, J. F. and Harris, D. F., “There Seems To Be Uncertainty about the Use of Significant Figures in Reporting Uncertainties of Results”, Journal of Chemical Education • Vol. 75 No. 8 August 1998.

Mätfel i gymnasiefysiken

Workshop

Stort tack för ert engagemang!

LUNDS UNIVERSITET

Nationellt resurscentrum för fysik