Ann-Marie Pendrill & David Eager

Studsmattematte

– *fritt fall och harmonisk svängningsrörelse*

Studsmattor finns i många trädgårdar och lekplatser. Under studsandet rör man sig huvudsakligen i vertikalled och under en del av tiden faller man fritt. Här bygger författarna en modell för rörelsen genom att anta proportionalitet mellan kraften från mattan och uttöjningen, vilket leder till harmoniska svängningar för små amplituder.

Var i en nöjespark får man uppleva de starkaste krafterna? Enligt riktlinjer för åkattraktioner får den som åker utsättas för krafter upp till 6*g*, dvs då man känner sig sex gånger tyngre än vanligt. De flesta nybyggda berg-och-dalbanor håller sig under 5*g*. Liseberg bad i somras sina Facebook-anhängare att gissa vilka attraktioner som har flest *g*. Som väntat var det de stora berg-och-dalbanorna och det höga fritt falltornet *AtmosFear* som fick flest röster. Men det är faktiskt så att man kan uppleva ännu större krafter i barnområdets studsmatta – upp till 7*g*! Liknande värden har vi fått i studsmattan i trädgården där vi också använt en spiralkanin för att illustrera krafterna på den som hoppar.

En spiralkanin som accelerometer i en studsmatta. Observera hur spiralen är hopdragen medan hopparen är i luften och utsträckt i nedersta punkten. Se också hur långt trampolinen sträckts ned på det andra fotot.

När fötterna inte längre har kontakt med trampolinen är hopparen i fritt fall, 0*g*, och spiralkaninen är hopdragen. I lägsta punkten, när trampolinen sjunkit ned som mest, utövas en stor kraft på hopparen, vilket illusteras med utdragningen av kaninen.

Från harmonisk svängning till fritt fall

I en första analys försummar vi energiförluster, både när man är i luften och i kontakt med studsmattan. Vi tänker oss att en person med massa m hoppar på trampolinen, som utövar en uppåtriktad kraft på hopparen så länge fötterna har kontakt med studsmattan. Kraften kan skrivas som $F(z)=-kz$, där k är "fjäderkonstanten" för studsmattan och z är nedböjningen av studsmattan, nedåt räknas som negativa z. När personen står still utövar trampolinen en kraft som precis motverkar tyngdkraften, dvs $kz=-mg$. Rörelsen för små svängningar omkring jämviktsläget, med start i nedersta punkten vid tiden $t=0$, kan beskrivas av uttrycket $z(t)=-mg/k-A\cos\omega t$, där $\omega^2=k/m$. Vi kan alltså skriva

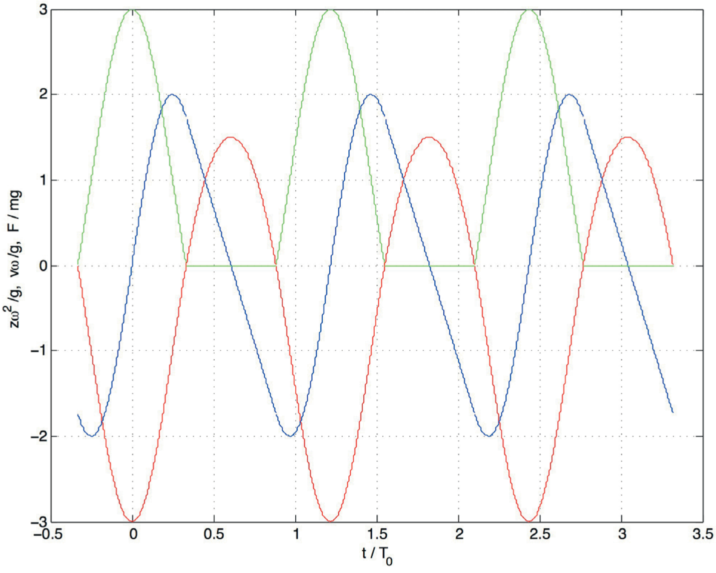
$$z(t) = -g/\omega^2 - A\cos\omega t$$

Vi kan få uttrycken för hastighet och acceleration genom att derivera:

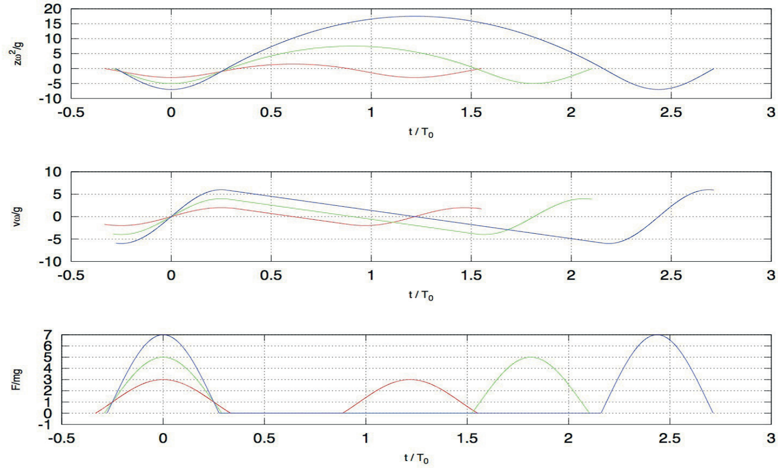
$$v(t) = A\omega\sin\omega t$$

$$a(t) = A\omega^2\cos\omega t$$

Perioden (svängningstiden) för små svängningar ges av $T_0 = 2\pi/\omega$. Så länge $A<g/\omega^2$ så har användaren kontakt med trampolinen och rörelsen är sinusformad på z-axeln. För större amplituder blir kraften i nedersta punkten större än $2g$ och hopparen lämnar trampolinen. Efter hand som hoppen blir högre upplever hopparen allt längre perioder av $0g$ ("air time") och allt större krafter i nedersta punkten. Liksom barn på en gunga så omvandlar den som hoppar på en trampolin hela tiden energi för att komma lite högre med varje svängning. När fötterna är i kontakt med trampolinen kan den som hoppar tillföra energi genom att höja tyngdpunktens läge medan krafterna är som störst, t ex genom att sträcka benen och svänga armarna. Medan fötterna är i kontakt med trampolinen så kan också små förändringar i kroppens läge göra att tyngdpunkten höjs. På det sättet ökar den maximala potentiella energin för nästa hopp. Vi går inte närmare in på detaljerna för dessa rörelser. Den potentiella energin omvandlas till kinetisk (rörelse) energi medan användaren faller. Denna kinetiska energi omvandlas sedan till elastisk energi när fötterna kommer i kontakt med studsmattan och sträcker ut den nedåt.



Teoretiska värden för höjd, hastighet och g-kraft under ett hopp som kommer upp i 3g. Den gröna kurvan representerar g-kraft, den blå kurvan hastighet och den röda kurvan svarar mot höjden.



Teoretiska värden för höjden (högst upp), hastigheten (mitten) och en normaliserad kraft (längst ned) under ett hopp som kommer upp i 3g (röd), 5g (grön) och 7g (blå).

När hopparen faller från högre och högre höjd så blir nedböjningen av studsmattan allt större, vilket leder till allt större uppåtriktad kraft på hopparen. Under kontakttiden får kraften från trampolinen farten att snabbt minska till noll i lägsta punkten och sedan öka igen till hopparen passerar jämviktsläget.

Eftersom hela kroppen accelereras så upplever varje del av kroppen starka krafter som är analoga med krafter från en starkare gravitation. Dessa krafter brukar kallas *g*-krafter. Trampolinen erbjuder inte bara koordination och träning för användarens hjärta, ben och muskler, den förstärkta gravitationskraften påverkar och "tränar" varje cell i kroppen då den går mellan 0*g* och mer än 5*g* under varje hopp.

Om användaren upplever Ng kan den maximala uppåtriktade kraften från trampolinen skrivas som *Nmg*. Detta svarar mot en maximal nedtöjning $z_N = -Nmg/k$ och en amplitud $A = (N-1)mg/k = (N-1)g\omega^2$.

Låt oss nu se på ett hopp mer i detalj. Vi startar i nedersta punkten. Rörelsen under den första delen av hoppet, medan hopparen fortfarande är i kontakt med trampolinen, kan fortfarande skrivas som

$$z(t) = -g/\omega^2 - A\cos\omega t = -\frac{g(1+(N-1)\cos\omega t)}{\omega^2}$$

Eftersom trampolinen inte kan dra hopparen nedåt så gäller detta uttryck bara så länge $z(t) < 0$, d v s för $\omega t < \arccos(-1/(N-1))$. Efter denna tidpunkt blir höjden positiv och bara tyngdkraften verkar på hopparen, som alltså kommer att vara i fritt fall ända tills hen åter är i kontakt med trampolinen. Hopparen lämnar trampolinen med hastigheten

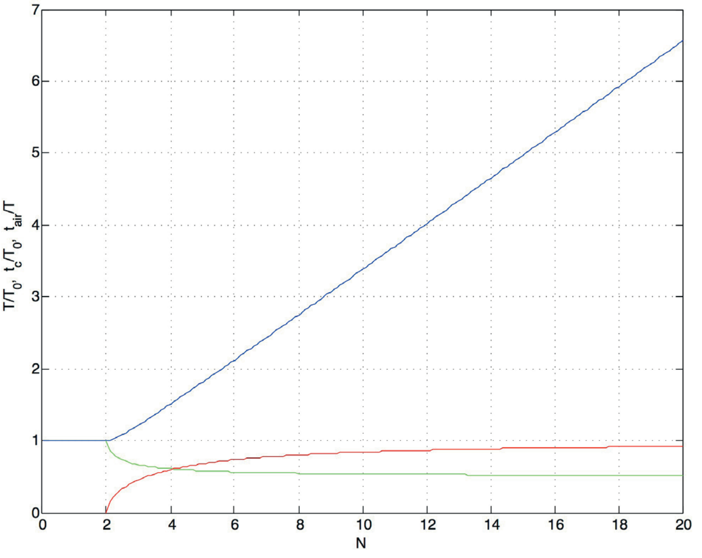
$$v_t = A\omega\sin(\arccos\tfrac{-1}{N-1}) = (N-1)\tfrac{mg}{k}\sqrt{k/m}\sqrt{1-\tfrac{1}{(N-1)^2}}$$

vilket också kan skrivas som

$$v_t = g\sqrt{N^2-2N}/\omega$$

Från hastigheten kan vi beräkna högsta höjden under hoppet: $h = v^2/2g$. Hoppare med lägre massa får ett högre värde på $\omega = \sqrt{k/m}$ och får alltså en lägre hastighet för samma acceleration längst ned under hoppet. På motsvarande sätt kommer en styvare trampolin att ge mindre fart för samma maximala acceleration. Om energiförluster försummas så kommer vi fram till att hopparen landar på trampolinen igen efter tiden

$$t_{air} = 2\sqrt{N^2-2N}/\omega = T_0\sqrt{N^2-2N}/\pi$$



Samband mellan studsperiod och den maximala kraften. Perioden är uttryckt som kvoten med perioden, T_0, för harmoniska svängningar, som gäller för amplituder upp till mg=k (blå). Den gröna linjen anger tiden som hopparen är i kontakt med trampolinen. Den röda kurvan visar kvoten mellan tid i luften (air time) och den totala perioden.

Tiden för kontakt med trampolinen under en hel period ges av

$$t_c = 2\arccos(-1/(N-1))/\omega = T_0 \arccos(-1/(N-1))/\pi$$

För höga hopp (stora N-värden) så närmar sig kontakttiden $T_0/2$. Från analysen ovan får vi fram ett uttryck för den totala tiden för en period på trampolinen:

$$T = t_c + t_{air} = T_0 \frac{\arccos(-1/(N-1)) + \sqrt{N^2 - 2N}}{\pi}$$

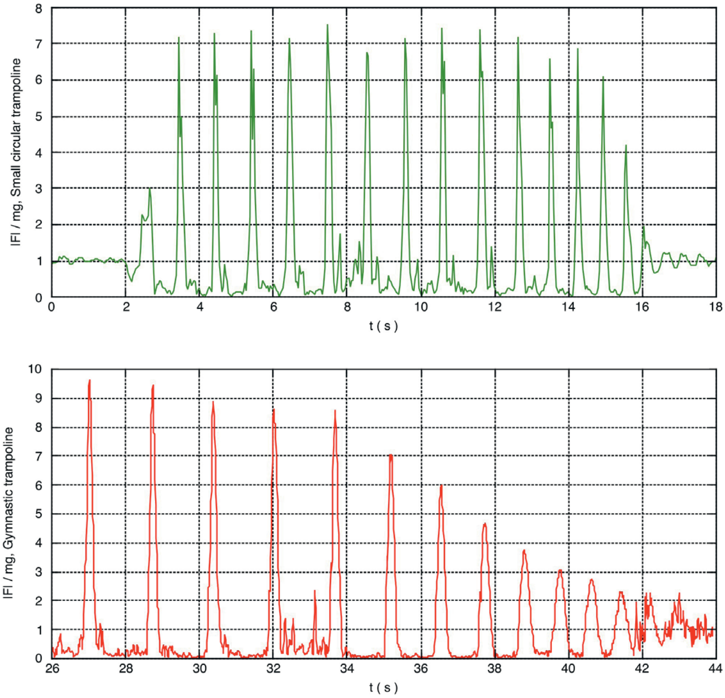
Kvoten T/T_0 för studsarna beror på den maximala kraften. Kvoten, $q = t_{air}/T$, mellan airtime och period växer för höga hopp, se figuren här ovan.

Experimentella resultat

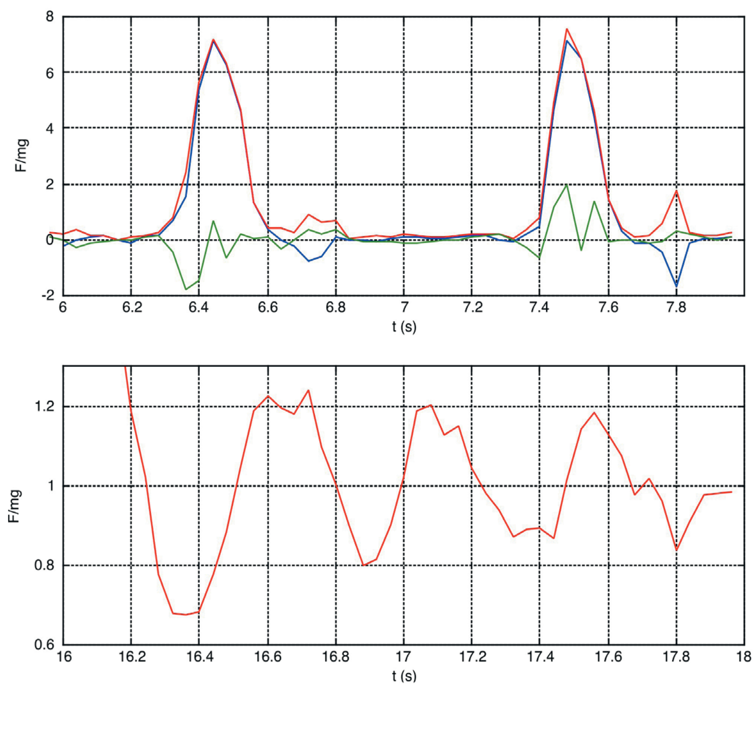
Som förberedelse för Lisebergs Facebook-fråga om vilka attraktioner som har störst *g*-krafter, beslöt vi att göra en mätning på den lilla trampolinen i kaninlandet: 1,3 m i diameter eller 1,9 m i diameter om fjädrarna runt om inkluderas. För datainsamlingen användes Wireless Dynamic Sensor System (WDSS) från Vernier som placerades i en mätväst. I det tillhörande programmet, Logger Pro, kunde data synkroniseras med en film av hoppet.

Den starkaste kraften verkar i lägsta punkten, när studsmattan är som mest nedböjd. Det överraskande resultatet av mätningarna var att man kan uppleva största *g*-kraften på Liseberg – omkring 7*g* – i barnområdet!

För att jämföra resultaten med den teoretiska analysen ovan behöver vi också veta resonansfrekvensen för små svängningar och i slutet av mätningen gjordes några små studsar, när fötterna hela tiden var i kontakt med trampolinen. Följande figurer visar mer i detalj ett par av de höga hoppen och även några av de avslutande små studsarna. Kvoten mellan perioden för små och höga hopp ska vara direkt relaterad till *g*-kraften.



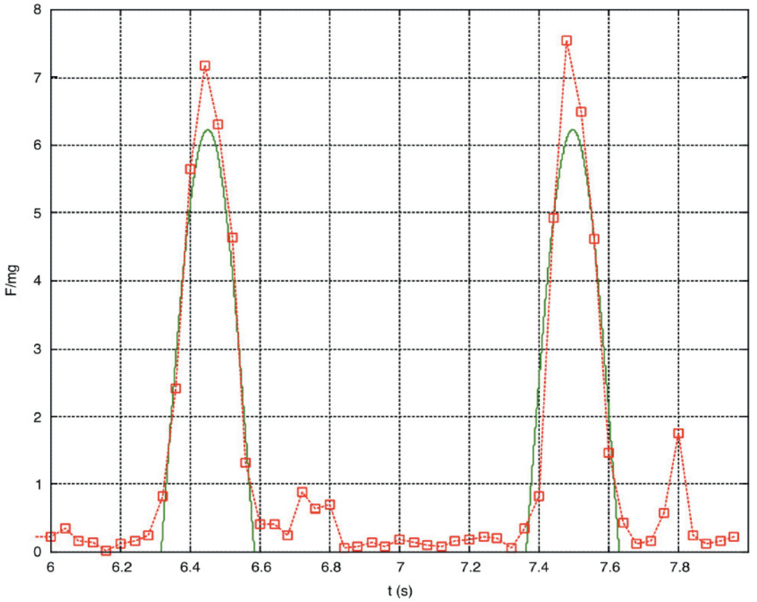
Accelerometerdata för studsar på en liten cirkulär trampolin på Liseberg. Dessutom visas data för en gymnastisk trampolin, där data går över 9mg, och som tydligt visar dämpningen och hur periodtiden växer med g-faktorn. Den längre perioden för 7g i den andra grafen visar också att kvoten k=m var mindre för det fallet.



Detaljer för accelerometerdata från figuren ovan för den lilla cirkulära trampolinen på Liseberg. Den röda grafen visar absolutbeloppet av vektorsumman av de tre komponenterna medan de blå och gröna kurvorna visar z- och x-komponenterna. De negativa x-värdena i början av kontakttiden indikerar att hopparen lutade sig lite framåt, medan de negativa z-värdena efter kontakttiden kan bero på att hopparen drog upp knäna. Den lägre grafen visar den total kraften under små hopp, när hopparen inte lämnar trampolinen.

Jämförelse mellan teori och experiment

Ur föregående figurer kan vi få fram perioden för små svängningar och för höga hopp. Vi finner att kvoten mellan dessa två perioder svarar mot en maximal kraft på ungefär 6,2*mg*. Följande figur visar den teoretiska grafen för 6,2*g* tillsammans med resultat från mätningen. Accelerometerdata visar dock mer än 7*g*.



Jämförelse mellan teoretiska resultat och uppmätta accelerometerdata.

Analysen baserades på antagandet att nedböjningen av trampolinen är proportionell mot kraften. För nedböjningar som är stora jämfört med trampolindimensionerna så är denna linjära anpassning mindre giltig. Detta kan möjligen förklara de små avvikelser som erhållits av andra forskare och i de experimentella data som visas i figuren ovan från hopp på den lilla studsmattan på Liseberg.

Rörelsen på en trampolin kombinerar två vanliga läroboksexempel: fritt fall och harmoniska svängningar. Medan rörelsen i fritt fall är oberoende av massa så gäller detta inte för harmoniska svängningar. Analysen av rörelsen öppnar möjligheter för en diskussion om vilka variabler som påverkar rörelsen och vilka variabler som är bäst för att presentera resultaten. Trampoliner är vanliga och bör kunna få en större användning i fysik- och matematikundervisning.

LITTERATUR OCH LÄNKAR

Eager, D., Chapman, C. & Bondoc, K. (2012). *Characterisation of trampoline bounce using acceleration*. 7th Australasian Congress on Applied Mechanics, ACAM

Från Fysik i Lund: tivoli.fysik.org/liseberg/attraktioner/studsmatta/

Video med mätdata: www.youtube.com/watch?v=gKls149zAJo

Denna artikel bygger på en artikel i *Physics Education* 50, s 64-70 (2015) och figurerna återges med tillstånd av IOP Publishing. Författarna vill rikta ett stort tack till Michael Nilsson på Liseberg som föreslog mätningarna på Lisebergs studsmatta och som dessutom erbjöd sig att hoppa med mätutrustning. AMP vill också tacka sin dotter som hoppade med spiralkaninen.